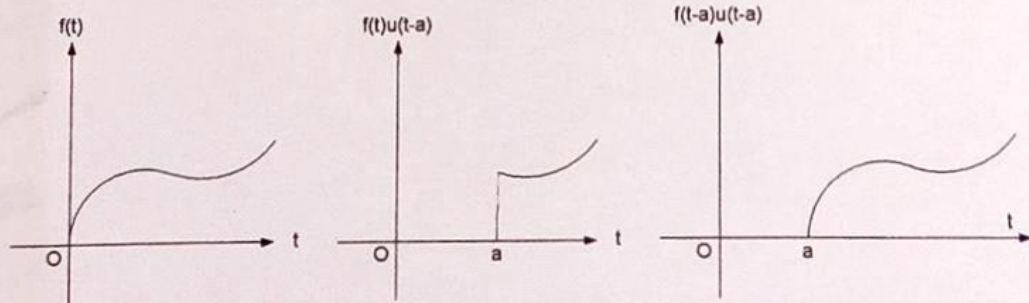
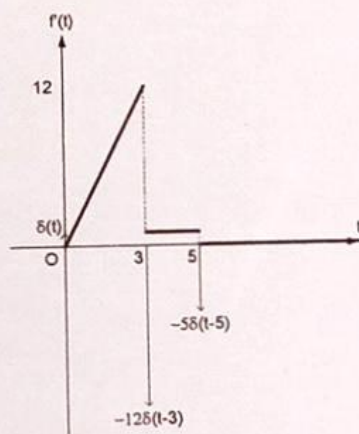
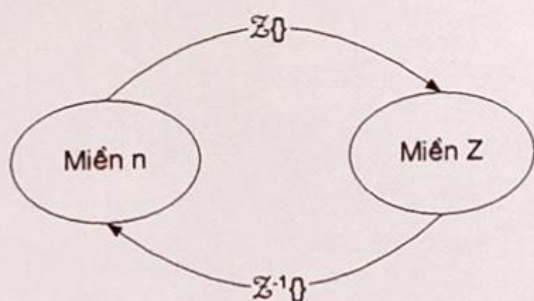


TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
KHOA ĐIỆN TỬ VIỄN THÔNG

TÔ BÁ ĐỨC (chủ biên)  
ĐÀO LÊ THU THẢO  
NGUYỄN HỮU PHÁT

GIÁO TRÌNH  
TOÁN KỸ THUẬT



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI  
KHOA ĐIỆN TỬ VIỄN THÔNG

---

---

TÔ BÁ ĐỨC (CHỦ BIÊN)  
ĐÀO LÊ THU THẢO  
NGUYỄN HỮU PHÁT

GIÁO TRÌNH  
TOÁN KỸ THUẬT



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT  
HÀ NỘI



## LỜI NÓI ĐẦU

Khi xem xét về những vấn đề kỹ thuật, không chỉ riêng trong kỹ thuật Điện tử Viễn thông mà tất cả các ngành kỹ thuật nói chung, chúng ta luôn bị ràng buộc bởi các hiện tượng vật lý. Bản chất vật lý buộc các nhà khoa học, các kỹ sư phải thực hiện trong những khung giới hạn của đối tượng vật lý cần miêu tả. Tùy thuộc vào các hiện tượng vật lý khác nhau của mỗi chuyên ngành kỹ thuật phải xem xét mà chúng ta sử dụng những công cụ toán học cho phù hợp nhằm mô tả hiện tượng, ước lượng và tối ưu hoá chúng trên ý nghĩa kỹ thuật. Các mô hình và các giả thiết toán học trong hầu hết các trường hợp đều tìm cách tiếp cận một cách gần đúng nhất với bản chất vật lý của hiện tượng và đơn giản hoá các vấn đề kỹ thuật trong các điều kiện nhất định.

Với mục đích trang bị cho sinh viên kỹ thuật ngành Điện tử Viễn thông các kiến thức cơ bản về toán áp dụng trong kỹ thuật, Khoa Điện tử Viễn thông Trường Đại học Bách khoa Hà Nội đã xây dựng và đề xuất chương trình khung môn Toán kỹ thuật. Khi biên soạn cuốn sách này, tác giả đã tham khảo và cập nhật những kiến thức mới nhất được xuất bản trong vài năm gần đây trên thế giới, đồng thời dựa trên tiêu chí nhấn mạnh vào các công cụ toán học được sử dụng nhiều nhất trong các ngành kỹ thuật, đặc biệt là trong ngành Điện tử viễn thông. Nội dung cuốn sách bao gồm ba chương, đi vào các vấn đề sau:

- Chương 1: Nhắc lại về đại số tuyến tính, không gian vector; các lập luận và các công thức chủ yếu dựa trên không gian vector số phức; làm rõ ý nghĩa của các vấn đề trong đại số tuyến tính.
- Chương 2: Đề cập đến các phép biến đổi giữa các không gian hàm số và không gian dãy số; các phép biến đổi bao gồm biến đổi Laplace, biến đổi  $Z$ , và biến đổi Fourier cho cả không gian hàm số và không gian dãy số.



- Chương 3: Hệ thống lại lý thuyết xác suất; giới thiệu về quá trình ngẫu nhiên và các đặc tính của chúng.

Những nội dung trên được dùng làm môn học cơ sở cho các môn học chuyên ngành Điện tử viễn thông đồng thời có thể sử dụng làm tài liệu tham khảo cho các ngành kỹ thuật khác. Tác giả cho rằng nắm vững các kiến thức toán học trong cuốn sách này cũng sẽ rất hữu ích cho các sinh viên muốn học cao lên sau đại học.

Nhóm tác giả xin chân thành cảm ơn các đồng nghiệp trong Bộ môn Mạch và Xử lý tín hiệu, đặc biệt là Trưởng bộ môn, Tiến sỹ Phạm Văn Bình, đã góp ý kiến quý báu, động viên và khích lệ trong quá trình hoàn thiện cuốn sách này.

**Nhóm tác giả**

***Tô Bá Đức (Chủ biên)***

***Đào Lê Thu Thảo***

***Nguyễn Hữu Phát***

# MỤC LỤC

<b>LỜI NÓI ĐẦU</b>	<b>3</b>
<b>Chương 1: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH</b>	<b>9</b>
<b>1.1. KHÔNG GIAN VECTOR</b>	<b>9</b>
1.1.1. Khái niệm về không gian vector	9
1.1.2. Phụ thuộc tuyến tính và độc lập tuyến tính	10
1.1.3. Bao tuyến tính và cơ sở của một không gian vector	10
1.1.4. Biểu diễn vector	11
1.1.5. Không gian con	12
<b>1.2. TÍCH VÔ HƯỚNG</b>	<b>14</b>
1.2.1. Định nghĩa tích vô hướng	14
1.2.2. Phân bù trực giao của một không gian con	15
<b>1.3. NORM CỦA VECTOR</b>	<b>16</b>
<b>1.4. QUÁ TRÌNH TRỰC GIAO HOÁ GRAM-SCHMIDT</b>	<b>18</b>
<b>1.5. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH</b>	<b>19</b>
1.5.1. Các khái niệm về ánh xạ tuyến tính	19
1.5.2. Biểu diễn ánh xạ tuyến tính theo ma trận	21
1.5.3. Các ma trận đặc biệt	22
1.5.4. Biểu diễn ma trận của ánh xạ tuyến tính đối với trường hợp cơ sở trực chuẩn	23
1.5.5. Rank và Nullity của ma trận	24
1.5.6. Bài toán đổi cơ sở	25
<b>1.6. BỔ SUNG THÊM VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH</b>	<b>27</b>
<b>1.7. TRỊ RIÊNG VÀ VECTOR RIÊNG</b>	<b>30</b>
<b>BÀI TẬP</b>	<b>35</b>



<b>Chương 2: CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI</b>	<b>38</b>
<b>2.1. BIẾN ĐỔI LAPLACE</b>	<b>38</b>
2.1.1. Biến đổi Laplace thuận	38
2.1.2. Sự tồn tại của biến đổi Laplace	42
2.1.3. Các tính chất của biến đổi Laplace	45
2.1.4. Bảng các biến đổi Laplace thông dụng	46
2.1.5. Biến đổi Laplace ngược	47
2.1.6. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng	51
2.1.7. Hàm nhảy đơn vị và hàm xung đơn vị	54
2.1.8. Xem xét thêm về phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng	61
2.1.9. Tích chập	64
<b>2.2. BIẾN ĐỔI <math>z</math></b>	<b>66</b>
2.2.1. Dãy số	66
2.2.2. Biến đổi $z$	67
2.2.3. Các tính chất của biến đổi $z$	71
2.2.4. Bảng các biến đổi $z$ thông dụng	72
2.2.5. Biến đổi $z$ ngược	73
<b>2.3. CHUỖI FOURIER</b>	<b>76</b>
2.3.1. Khai triển chuỗi Fourier	76
2.3.2. Định lý nhân và định lý Parseval	78
<b>2.4. BIẾN ĐỔI FOURIER</b>	<b>81</b>
2.4.1. Tích phân Fourier	81
2.4.2. Cặp biến đổi Fourier	83
2.4.3. Các tính chất của biến đổi Fourier	86
2.4.4. Năng lượng và công suất trung bình - Định lý Parseval	90
2.4.5. Biến đổi Fourier tổng quát	92
2.4.6. Biến đổi Fourier cho dãy số rời rạc	92
2.4.7. Biến đổi Fourier rời rạc	94
<b>BÀI TẬP</b>	<b>96</b>
<b>Chương 3: XÁC SUẤT VÀ QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN</b>	<b>99</b>
<b>3.1. KHÁI NIỆM VỀ XÁC SUẤT</b>	<b>99</b>
3.1.1. Một số thuật ngữ	99



3.1.2. Lý thuyết tiên đề	99
3.1.3. Xác suất giao	100
3.1.4. Xác suất có điều kiện	101
3.1.5. Xác suất toàn phần	102
3.1.6. Định lý Bayes	102
3.1.7. Độc lập thống kê	103
3.1.8. Chuỗi phép thử Bernoulli	104
<b>3.2. BIẾN NGẪU NHIÊN</b>	<b>105</b>
3.2.1. Định nghĩa biến ngẫu nhiên	105
3.2.2. Hàm phân bố và hàm mật độ	105
3.2.3. Một số biến ngẫu nhiên thông dụng	107
3.2.4. Hàm phân bố và hàm mật độ có điều kiện	111
3.2.5. Các đặc số của biến ngẫu nhiên	113
<b>3.3. VECTOR NGẪU NHIÊN</b>	<b>117</b>
3.3.1. Khái niệm về vector ngẫu nhiên	117
3.3.2. Hàm phân bố giao và hàm mật độ giao	118
3.3.3. Độc lập thống kê	120
3.3.4. Định lý giới hạn tập trung	121
3.3.5. Các đặc số của vector ngẫu nhiên	122
3.3.6. Vector ngẫu nhiên Gauss	127
<b>3.4. CÁC QUÁ TRÌNH NGẪU NHIÊN</b>	<b>129</b>
3.4.1. Đặt vấn đề	129
3.4.2. Khái niệm về quá trình ngẫu nhiên	129
3.4.3. Các hàm phân bố và hàm mật độ của quá trình ngẫu nhiên	130
3.4.4. Hai quá trình ngẫu nhiên độc lập thống kê	130
3.4.5. Quá trình dừng	131
3.4.6. Trung bình theo thời gian và quá trình ergodic	134
3.4.7. Các hàm tương quan và hàm hiệp biến	135
3.4.8. Quá trình ngẫu nhiên Gauss	139
3.4.9. Đặc tính phổ của quá trình ngẫu nhiên	140
<b>BÀI TẬP</b>	<b>147</b>
<b>TÀI LIỆU THAM KHẢO</b>	<b>151</b>